



**ESTYLF 2012**

**XVI CONGRESO ESPAÑOL SOBRE TECNOLOGÍAS  
Y LÓGICA FUZZY**

***Actas***

**Valladolid, 1- 3 de febrero de 2012  
Palacio de Congresos *Conde Ansúrez***

Actas del  
XVI Congreso Español sobre  
Tecnologías y Lógica Fuzzy

Valladolid, 1-3 de febrero de 2012

**ORGANIZADORES:**

Universidad de Valladolid  
European Society for Fuzzy Logic and Technology

**EDITORES:**

Gregorio I. Sainz Palmero  
Jesús Alcalá Fernández  
Rubén García Pajares  
Bonifacio Llamazares  
María Jesús de la Fuente Aparicio

**ENTIDADES COLABORADORAS:**

Ministerio de Ciencia e Innovación. Gobierno de España.  
Universidad de Valladolid.  
VIAS y CONSTRUCCIONES, S. A.  
Fundación CARTIF.

ISBN: 978-84-615-6653-2

## Sesiones Especiales

### Sesión Especial: Toma de decisiones con información difusa

#### Organizadores:

- Luis Martínez
- Rosa Rodríguez
- Francisco Herrera

#### **Imprecisión de los votantes en los sistemas de votación. Una propuesta basada en múltiples términos lingüísticos.....181**

(Edurne Falcó Díaz de Cerio, José Luis García Lapresta, Llorenç Roselló Saurí)

#### **An evaluation model for company environmental practices based on interacting criteria.....187**

(Rocío de Andrés Calle, Teresa González-Arteaga, Luis Martínez)

#### **Modelling influence among individuals in group decision making problems .....193**

(I.J. Pérez, F.J. Cabrerizo, S. Alonso, E. Herrera-Viedma)

#### **Metodología owa-topsis para la evaluación de tecnologías de fabricación de células fotovoltaicas.....199**

(E. Cables Pérez, M. S. Garcia-Cascales, M. T. Lamata Jiménez, J. M. Sánchez-Lozano)

#### **Evaluación de la sostenibilidad de proyectos con lógica borrosa.....205**

(Raúl Martín, Raquel Caro, Luis Garmendia, Alfonso Garmendia)

#### **Uso de operadores OWA para modelar la actitud hacia el consenso en problemas de toma de decisión en grupo .....211**

(Iván Palomares, Jun Liu, Yang Xu, Luis Martínez)

#### **Modelo lingüístico de toma de decisiones multicriterio con expresiones lingüísticas comparativas.....217**

(Rosa M. Rodríguez, Luis Martínez, Francisco Herrera)

#### **Application of the AHP in corporate reputation management.....223**

(Ana María Casado Molina, José Ignacio Peláez Sánchez, Jesús Doña Fernández)

#### **Toma de decisión multicriterio usando integrales de Choquet intervalo-valoradas.....230**

(Humberto Bustince, Javier Fernández, Aranzazu Jurio, Radko Mesiar, Anna Kolesárová, Benjamin Bedregal)

#### **Type-1 OWA based multi-granular consensus model.....235**

(Francisco Mata, Francisco Chiclana, Shang-Ming Zhou)

**Método difuso para identificación de variables relevantes en prospectiva tecnológica .....241**

(Pablo Villacorta, Dagoberto Castellanos, Antonio Masegosa)

**Lógica difusa en sistemas de fusión de información visual: aplicaciones, extensiones y propuestas.....247**

(Juan Gómez-Romero, Jesús García, Miguel A. Patricio, Miguel A. Serrano, José M. Molina)

**Impacto de las etiquetas en la interpretación de la escala de Likert.....253**

(Nuria Martínez, Daniel Gómez, Javier Montero)

**Evaluación de un método de ponderación de atributos multivaluados en sistemas de recomendación basados en contenido .....259**

(Manuel J. Barranco, Jorge Castro, Luis Martínez)

**Sesión Especial: Sistemas Difusos Evolutivos**

**Organizadores:**

- María José Gacto
- Rafael Alcalá

**Aprendizaje evolutivo de un sistema basado en reglas difusas para un sistema de control de entorno por medio de puntero láser.....265**

(Francisco Chávez, Francisco Fernández, Rafael Alcalá, Jesús Alcalá, Francisco Herrera)

**Ajuste genético lateral de las etiquetas lingüísticas en descubrimiento de subgrupos .....271**

(C.J. Carmona, P. González, M.J. Gacto, M.J. del Jesús)

**Un estudio experimental del uso de dominios con intensificaciones.....277**

(David García, Antonio González, Enrique Leyva, Raúl Pérez)

**Reconocimiento del habla utilizando conjuntos difusos intervalo-valorados ajustados con técnicas evolutivas .....283**

(Juan Cerrón, Raúl Orduna, Mikel Galar, Edurne Barrenechea)

**Una propuesta cooperativa entre conjuntos difusos intervalo-valorados y ajuste evolutivo para mejorar el rendimiento de árboles de decisión difusos.....289**

(José Antonio Sanz, Alberto Fernandez, Humberto Bustince, Francisco Herrera)

**Aprendizaje evolutivo de sistemas aproximativos de tipo TSK para problemas de alta dimensionalidad.....295**

(M.J. Gacto1, R. Alcalá, F. Herrera)

**Algoritmo genético para decisiones inteligentes en cruces de vehículos con función de coste dinámica.....301**

(E. Onieva, J. Villagrà, V. Milanés, J. Godoy)

**Un operador de conjunción adaptativo para modelado difuso lingüístico de problemas de alta dimensionalidad.....307**

(César Serrano, Antonio A. Márquez, Francisco A. Márquez, Antonio Peregrín)

**Un sistema de clasificación basado en reglas difusas jerárquico con programación genética para problemas de clasificación altamente no balanceados.....313**

(Victoria López, Alberto Fernández, María José del Jesús, Francisco Herrera)

**Sesión Especial: Datos de baja calidad**

**Organizadores:**

- Luciano Sánchez
- Ana María Palacios
- Inés Couso

**Linear and nonlinear regression models based in a concept of distance for imprecise response.....319**

(Concepción Roldán, Antonio Roldán, Juan Martínez-Moreno)

**Extracción de reglas de asociación difusas a partir de datos de baja calidad.....325**

(A.M. Palacios, J. Alcalá-Fdez)

**Disimilitud esperada de una variable aleatoria difusa.....331**

(Laura Garrido)

**Análisis espectral singular para datos de baja calidad.....336**

(Luciano Sánchez, Inés Couso, Luis Junco, Ana Palacios)

**Introducing a genetic fuzzy linguistic combination method for bagging fuzzy rule-based multiclassification systems.....342**

(Krzysztof Trawinski, Oscar Cordón, Arnaud Quirin, Luciano Sánchez)

**Comparación de métodos de evaluación en algoritmos GAP con representación de imprecisión.....348**

(José R. Villar, Enrique de la Cal, Marco García-Tamargo, Javier Sedano)

**Sesión Especial: Aplicaciones reales**

**Organizadores:**

- María Jesús de la Fuente
- Marta Galende

**Estimador recursivo subóptimo para el ajuste de modelos borrosos TS.....354**

(Antonio Javier Barragán Piña, Mariano José Aznar Torres, José Manuel Andújar Márquez)

# MODELO LINGÜÍSTICO DE TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO CON EXPRESIONES LINGÜÍSTICAS COMPARATIVAS

Rosa M. Rodríguez<sup>1</sup>, Luis Martínez<sup>1</sup>, Francisco Herrera<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Dpto. de Informática, Universidad de Jaén, {rmrodrig,martin}@ujaen.es

<sup>2</sup>Dpto. de Ciencias de la Computación y I.A, Universidad de Granada, herrera@decsai.ugr.es

## Resumen

El interés de esta contribución se centra en problemas de toma de decisiones definidos bajo incertidumbre donde la información es vaga e imprecisa. Nuestro objetivo es facilitar a los expertos la expresión de sus valoraciones cuando dudan entre varios valores lingüísticos. Para ello introducimos el concepto de Conjunto de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos que nos permite modelar expresiones lingüísticas comparativas generadas mediante una gramática libre de contexto. Posteriormente, presentamos un modelo lingüístico de toma de decisiones multicriterio que utiliza dichas expresiones lingüísticas comparativas.

**Palabras Clave:** gramática libre de contexto, expresiones lingüísticas comparativas, conjunto de términos lingüísticos difusos dudosos, toma de decisiones multicriterio.

## 1 INTRODUCCIÓN

La toma de decisión es un proceso habitual para los seres humanos en muchas actividades del mundo real como la ingeniería, organización, finanzas, medicina, etc. Los problemas de decisión normalmente se definen en contextos donde la información es vaga e imprecisa. Existen diferentes enfoques que manejan este tipo de información, tales como, conjuntos difusos [14], conjuntos difusos tipo 2 [3], teoría de la evidencia [13], etc. En este trabajo nos hemos centrado en el enfoque lingüístico difuso [15] que ha proporcionado buenos resultados en problemas de toma de decisiones definidos bajo incertidumbre [1, 12].

Hasta ahora estos enfoques utilizan un único término lingüístico para valorar alternativas o criterios en problemas de toma de decisiones. Sin embargo, en algunas situaciones es más adecuado utilizar más de una etiqueta lingüística. En la literatura se han presentado algunos enfoques que

intentan evitar esta limitación y permiten utilizar más de un término lingüístico para valorar alternativas o criterios [5, 8]. En el contexto cuantitativo cuando suceden estas situaciones donde los expertos dudan entre varios valores se ha propuesto el uso de conjuntos difusos dudosos [10].

En esta contribución introducimos el concepto de Conjunto de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos (CTLDD) [7], que nos permitirá modelar múltiples valores lingüísticos cuando los expertos duden entre varios de ellos. Mediante una gramática libre de contexto definiremos expresiones lingüísticas comparativas cercanas al modelo cognitivo de los seres humanos. Estas expresiones serán representadas mediante CTLDD y los expertos las podrán utilizar en problemas de decisión. Una vez introducidas estas herramientas, presentaremos un modelo lingüístico de toma de decisiones multicriterio, el cual se divide en tres fases: (i) Transformación, las expresiones lingüísticas comparativas y términos lingüísticos simples son transformados en CTLDD, (ii) Agregación, se calculan las opiniones colectivas para cada alternativa utilizando dos operadores de agregación simbólicos, y (iii) Explotación, a partir de una relación de preferencia construida mediante la comparación de intervalos lingüísticos obtenidos de las opiniones colectivas, se utiliza un grado de selección de no dominancia para obtener el conjunto solución de alternativas del problema de toma de decisión.

Este trabajo se estructura como sigue: en la Sección 2 se introducen brevemente algunos preliminares necesarios. En la Sección 3 se presenta el concepto de CTLDD y se define la gramática libre de contexto que genera las expresiones lingüísticas comparativas. En la Sección 4 se propone un modelo lingüístico de toma de decisiones multicriterio y se definen dos operadores de agregación simbólicos. Además se introduce un ejemplo ilustrativo de dicho modelo, y finalmente se concluye en la Sección 5.

## 2 PRELIMINARES

El modelo de toma de decisiones propuesto en esta contribución representa las expresiones lingüísticas mediante CTLDD. Estos conjuntos están basados en el enfoque lingüístico difuso [15] y conjuntos difusos dudosos [10], en

esta sección revisamos brevemente ambos enfoques.

## 2.1 ENFOQUE LINGÜÍSTICO DIFUSO

En muchos problemas de toma de decisiones donde la información es vaga e imprecisa es más adecuado el uso de información cualitativa que cuantitativa. En estas situaciones el uso del enfoque lingüístico difuso [15] ha proporcionado buenos resultados [1, 12], utilizando para ello variables lingüísticas [15]. Una variable lingüística es una variable cuyos valores no son números sino palabras o expresiones en lenguaje natural o artificial [15]. Un valor lingüístico es menos preciso que un número, pero es más cercano al lenguaje natural utilizado por los seres humanos.

Una variable lingüística se define según Zadeh mediante una sintaxis y una semántica. Existen diferentes posibilidades para elegir la sintaxis:

- Proporcionar un conjunto de términos distribuidos en una escala con un orden definido [12]. Por ejemplo, un conjunto de 7 términos lingüísticos podría ser:  $S = \{s_0 : nada, s_1 : muy\ bajo, s_2 : bajo, s_3 : medio, s_4 : alto, s_5 : muy\ alto, s_6 : perfecto\}$
- Definir el conjunto de términos lingüísticos mediante una gramática libre de contexto [2, 15].

Para definir la semántica también existen diferentes formas:

- Una semántica basada en funciones de pertenencia y una regla semántica [2].
- Una semántica basada en una estructura ordenada del conjunto de términos lingüísticos [9, 12].
- Una semántica que utiliza elementos de las definiciones anteriores [4].

En esta contribución trabajaremos con un conjunto ordenado de términos lingüísticos que requiere que existan los operadores de Negación, Máximo y Mínimo.

## 2.2 CONJUNTOS DIFUSOS DUDOSOS

La definición de conjunto difuso dudoso fue introducida por Torra [10] para manejar situaciones de decisión en contextos cuantitativos donde los expertos dudan entre diferentes valores para valorar alternativas o criterios. Un conjunto difuso dudoso se define como

**Definición 1** [10] *Sea  $X$  un conjunto de referencia, un conjunto difuso dudoso en  $X$  es una función  $h$  que devuelve un subconjunto de valores en el intervalo  $[0,1]$ :*

$$h : X \rightarrow P([0, 1])$$

Un conjunto difuso dudoso también puede ser definido en términos de la unión de sus grados de pertenencia.

**Definición 2** *Sea  $M = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$  un conjunto de  $n$  funciones de pertenencia, el conjunto difuso dudoso asociado a  $M$ ,  $h_M$ , es definido como:*

$$h_M : M \rightarrow P([0, 1])$$

$$h_M(x) = \bigcup_{\mu \in M} \{\mu(x)\}$$

Diferentes operaciones de conjuntos difusos dudosos tales como la unión, intersección, complemento, etc, pueden ser encontrados en [10].

## 3 EXPRESIONES LINGÜÍSTICAS COMPARATIVAS

Dado que el objetivo que perseguimos en esta contribución es la de facilitar la expresión y modelado de preferencias en problemas de decisión bajo incertidumbre, en esta sección presentamos la definición de CTLDD. Posteriormente, mostraremos las expresiones lingüísticas comparativas que podrán ser utilizadas para modelar preferencias, definiremos la gramática libre de contexto que las genera, e introduciremos una función para transformar dichas expresiones en CTLDD.

### 3.1 CONJUNTO DE TÉRMINOS LINGÜÍSTICOS DIFUSOS DUDOSOS

De forma similar a los conjuntos difusos dudosos [10] donde los expertos pueden dudar entre varios valores para valorar una alternativa o criterio, en contextos cualitativos puede suceder que los expertos duden entre varios valores lingüísticos para expresar sus valoraciones. Para manejar estas situaciones, introducimos el concepto de CTLDD.

**Definición 3** [7] *Sea  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos, un CTLDD,  $H_S$ , se define como un subconjunto finito ordenado de términos lingüísticos consecutivos de  $S$ .*

**Definición 4** [7] *Para obtener el límite superior e inferior de un CTLDD,  $H_S$ , se definen los operadores, upper bound,  $H_{S+}$ , y lower bound,  $H_{S-}$ :*

- $H_{S+} = \max(s_i, s_j) = s_i, si\ s_i \geq s_j; s_i, s_j \in H_S$
- $H_{S-} = \min(s_i, s_j) = s_i, si\ s_i \leq s_j; s_i, s_j \in H_S$

En problemas de toma de decisiones es necesario realizar comparaciones entre términos lingüísticos. Por esta razón, definimos el concepto de *envoltura* de un CTLDD que nos permitirá comparar dos CTLDD.



**Definición 5** [7] La envoltura de un CTLDD,  $env(H_S)$ , es un intervalo lingüístico cuyos límites son obtenidos mediante el límite superior e inferior:

$$env(H_S) = [H_{S^-}, H_{S^+}], \quad H_{S^-} \leq H_{S^+}$$

Otras operaciones con CTLDD fueron definidas en [7].

### 3.2 EXPRESIONES LINGÜÍSTICAS COMPARATIVAS. GRAMÁTICA LIBRE DE CONTEXTO

El objetivo de la definición del concepto de CTLDD es facilitar a los expertos la expresión de sus valoraciones con expresiones lingüísticas cuando duden entre varios términos lingüísticos. Estas expresiones lingüísticas,  $ll$ , serán generadas mediante una gramática libre de contexto,  $G_H$ , y representadas mediante CTLDD. Dicha gramática,  $G_H$ , se define como

**Definición 6** [7] Sea  $G_H$  una gramática libre de contexto y  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos. Los elementos de  $G_H = (V_N, V_T, I, P)$  son definidos como:

$$V_N = \{\langle \text{término primario} \rangle, \langle \text{término compuesto} \rangle, \langle \text{relación unaria} \rangle, \langle \text{relación binaria} \rangle, \langle \text{conjunción} \rangle\}$$

$$V_T = \{\text{menor que}, \text{mayor que}, \text{entre}, y, s_0, s_1, \dots, s_g\}$$

$$I \in V_N$$

Las reglas de producción son definidas mediante la forma extendida de Backus Naur, en la que la utilización de paréntesis indica elementos opcionales y el símbolo  $|$  indica elementos alternativos [2]. Las reglas de producción para la gramática libre de contexto,  $G_H$ , son las siguientes:

$$P = \{I ::= \langle \text{término primario} \rangle | \langle \text{término compuesto} \rangle$$

$$\langle \text{término compuesto} \rangle ::= \langle \text{relación unaria} \rangle$$

$$\langle \text{término primario} \rangle | \langle \text{relación binaria} \rangle \langle \text{término primario} \rangle$$

$$\langle \text{conjunción} \rangle \langle \text{término primario} \rangle$$

$$\langle \text{término primario} \rangle ::= s_0 | s_1 | \dots | s_g$$

$$\langle \text{relación unaria} \rangle ::= \text{menor que} | \text{mayor que}$$

$$\langle \text{relación binaria} \rangle ::= \text{entre}$$

$$\langle \text{conjunción} \rangle ::= y\}$$

Dichas expresiones lingüísticas comparativas,  $ll$ , son representadas mediante CTLDD utilizando la función,  $E_{G_H}$ .

**Definición 7** [7] Sea  $E_{G_H}$  una función de transformación entre expresiones lingüísticas,  $ll \in G_H$ , y CTLDD,  $H_S$ , siendo  $S$  el conjunto de términos lingüísticos utilizados por  $G_H$ :

$$E_{G_H} : ll \longrightarrow H_S$$

Las expresiones lingüísticas generadas mediante las reglas de producción de la gramática libre de contexto,  $G_H$ , son transformadas en CTLDD de diferentes formas:

- $E_{G_H}(s_i) = \{s_i/s_i \in S\}$
- $E_{G_H}(\text{menor que } s_i) = \{s_j/s_j \in S \text{ y } s_j \leq s_i\}$
- $E_{G_H}(\text{mayor que } s_i) = \{s_j/s_j \in S \text{ y } s_j \geq s_i\}$
- $E_{G_H}(\text{entre } s_i \text{ y } s_j) = \{s_k/s_k \in S \text{ y } s_i \leq s_k \leq s_j\}$

## 4 MODELO LINGÜÍSTICO DE TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO CON EXPRESIONES LINGÜÍSTICAS COMPARATIVAS

Esta sección presenta un modelo lingüístico de toma de decisiones multicriterio basado en procesos computacionales simbólicos, que permite a los expertos expresar sus valoraciones mediante expresiones lingüísticas comparativas o términos lingüísticos simples.

### 4.1 PROBLEMA DE TOMA DE DECISIÓN LINGÜÍSTICO MULTICRITERIO

Un problema de toma de decisión lingüístico multicriterio se define como un conjunto de alternativas  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , donde cada alternativa se valora mediante un conjunto de criterios  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ , que pueden ser valorados mediante expresiones lingüísticas comparativas o términos lingüísticos simples.

Supongamos que tenemos un conjunto de términos lingüísticos  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ , y una gramática libre de contexto  $G_H$ , que genera las expresiones lingüísticas comparativas,  $ll_{i,j}$ , para valorar los criterios,  $c_i \in C = \{c_1, \dots, c_m\}$ , de cada alternativa,  $x_j \in X = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

### 4.2 MODELO LINGÜÍSTICO DE TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO

El modelo propuesto en esta contribución realiza los procesos de computación con palabras mediante intervalos lingüísticos. Dicho modelo se divide en 3 fases (ver Figura 1):

1. *Transformación de las expresiones lingüísticas comparativas en CTLDD.*

Los expertos pueden expresar sus preferencias mediante expresiones lingüísticas comparativas,  $ll \in G_H$ . Dichas expresiones son transformadas en CTLDD utilizando la función de transformación  $E_{G_H}$ , (Definición 7).

**Ejemplo:** Supongamos un conjunto de alternativas  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  y un conjunto de criterios  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$  para cada alternativa. Sea  $S = \{s_0 : \text{nada } (n), s_1 : \text{muy bajo } (mb), s_2 : \text{bajo } (b), s_3 : \text{medio } (m), s_4 : \text{alto } (a), s_5 : \text{muy alto } (ma), s_6 : \text{perfecto } (p)\}$  el conjunto de términos lingüísticos y

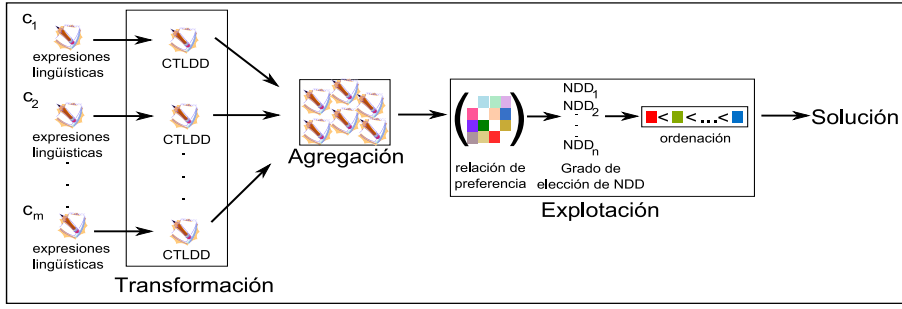


Figura 1: Esquema del modelo lingüístico de toma de decisiones multicriterio

$G_H$  la gramática libre de contexto que genera las expresiones lingüísticas comparativas. En la Tabla 1 se visualizan las valoraciones proporcionadas para este problema.

$$H_{S_{min}^+}(x_i) = \min\{H_{S^+}^j(x_i) / j \in \{1, \dots, m\}\}, i \in \{1, \dots, n\}$$

**Ejemplo:** El resultado de utilizar este operador de agregación sobre el ejemplo presentado anteriormente puede verse en la Tabla 3.

Tabla 1: Valoraciones lingüísticas del problema de decisión

		criterios		
ll		c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>
alt.	x <sub>1</sub>	entre mb y m	entre a y ma	a
	x <sub>2</sub>	entre b y m	m	menor que b
	x <sub>3</sub>	mayor que a	entre mb y b	mayor que a

Tabla 3: Valoraciones agregadas con,  $H_{S_{min}^+}$ , min\_upper

alternativas/ $H_{S_{min}^+}(x_i)$		
x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>
{m}	{b}	{b}

En la Tabla 2 se muestra la transformación de las expresiones lingüísticas comparativas en CTLDD.

Tabla 2: Valoraciones transformadas en CTLDD

		criterios		
$H_S^j(x_i)$		c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>
alt.	x <sub>1</sub>	{mb, b, m}	{a, ma}	{a}
	x <sub>2</sub>	{b, m}	{m}	{n, mb, b}
	x <sub>3</sub>	{a, ma, p}	{mb, b}	{a, ma, p}

## 2. Agregación de las valoraciones representadas mediante CTLDD.

Una vez que las valoraciones están representadas en CTLDD, se realiza el proceso de agregación utilizando para ello dos operadores de agregación simbólicos. El resultado de la agregación es un intervalo lingüístico para cada alternativa que representa la cobertura de los CTLDD agregados. Los operadores son:

### i) Operador min\_upper

Este operador de agregación simbólico para CTLDD obtiene como resultado el mínimo de los términos lingüísticos superiores.

**Definición 8** Sean  $\{H_S^j(x_i)/i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$  un conjunto de CTLDD y  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos, el operador min\_upper,  $H_{S_{min}^+}$ , se define como:

### ii) Operador max\_lower

Este operador devuelve el máximo de los términos lingüísticos inferiores de los CTLDD.

**Definición 9** Sean  $\{H_S^j(x_i)/i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$  un conjunto de CTLDD y  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos, el operador max\_lower,  $H_{S_{max}^-}$ , se define como:

$$H_{S_{max}^-}(x_i) = \max\{H_{S^-}^j(x_i) / j \in \{1, \dots, m\}\}, i \in \{1, \dots, n\}$$

**Ejemplo:** Si utilizamos este operador de agregación sobre el ejemplo ilustrativo, los resultados son los siguientes (ver Tabla 4):

Tabla 4: Valoraciones agregadas con,  $H_{S_{max}^-}$ , max\_lower

alternativas/ $H_{S_{max}^-}(x_i)$		
x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>
{a}	{m}	{a}

iii) A continuación se construye un intervalo lingüístico para cada alternativa,  $H'(x_i)$ , utilizando para ello los términos lingüísticos obtenidos de los anteriores operadores de agregación:

$$H'_{max}(x_i) = \max\{H_{S_{min}^+}(x_i), H_{S_{max}^-}(x_i)\}$$

$$p_{ij} = P(x_i > x_j) = \frac{\max(0, \text{Ind}(H'_{S^+}(x_i)) - \text{Ind}(H'_{S^-}(x_j))) - \max(0, \text{Ind}(H'_{S^-}(x_i)) - \text{Ind}(H'_{S^+}(x_j)))}{(\text{Ind}(H'_{S^+}(x_i)) - \text{Ind}(H'_{S^-}(x_i))) - (\text{Ind}(H'_{S^+}(x_j)) - \text{Ind}(H'_{S^-}(x_j)))} \quad (1)$$

$$H'_{\min}(x_i) = \min\{H'_{S^+}(x_i), H'_{S^-}(x_i)\}$$

$$H'(x_i) = [H'_{\min}(x_i), H'_{\max}(x_i)]$$

**Ejemplo:** Los intervalos lingüísticos de cada alternativa son mostrados en la Tabla 5:

Tabla 5: Intervalos lingüísticos para las alternativas

alternativas/ $H'(x_i)$		
$x_1$	$x_2$	$x_3$
$[m, a]$	$[b, m]$	$[b, a]$

### 3. Fase de explotación

Una vez que la información lingüística ha sido agregada, se realiza la fase de explotación donde el conjunto de alternativas es ordenado a partir de los intervalos lingüísticos obtenidos, para elegir la mejor alternativa. Para ello seguimos los siguientes pasos:

i) *Construcción de una relación de preferencia.* Utilizando los intervalos lingüísticos asociados a cada alternativa construimos una relación de preferencia entre alternativas [6]. Para construir esta relación de preferencia adaptamos el método propuesto por Wang et al. en [11].

**Definición 10** [11] Sean  $A = [a_1, a_2]$  y  $B = [b_1, b_2]$  dos intervalos lingüísticos, el grado de preferencia de  $A$  sobre  $B$  (o  $A > B$ ) se define como:

$$P(A > B) = \frac{\max(0, a_2 - b_1) - \max(0, a_1 - b_2)}{(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)}$$

y el grado de preferencia de  $B$  sobre  $A$  como:

$$P(B > A) = \frac{\max(0, b_2 - a_1) - \max(0, b_1 - a_2)}{(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)}$$

Debemos tener en cuenta que  $P(A < B) + P(B > A) = 1$  y  $P(A > B) = P(B > A) = 0.5$  cuando  $A = B$ , es decir,  $a_1 = b_1$  y  $a_2 = b_2$ .

**Nota:** Si los valores de los intervalos son iguales ( $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ ) se compararán como números enteros. Por tanto, si  $a_1 > b_1$  entonces  $P(A > B) = 1$ ,  $P(A < B) = 0$  y si  $a_1 = b_1$  entonces  $P(A > B) = P(A < B) = 0.5$ .

Para poder utilizar esta función con intervalos lingüísticos debemos de adaptarla de la siguiente forma:

$$\text{Ind}(s_i) = i, s_i \in S = \{s_0, \dots, s_g\}$$

$$A = [\text{Ind}(s_i), \text{Ind}(s_j)], s_i \leq s_j$$

$$B = [\text{Ind}(s_k), \text{Ind}(s_l)], s_k \leq s_l$$

$$P(A > B) = \frac{\max(0, \text{Ind}(s_j) - \text{Ind}(s_k)) - \max(0, \text{Ind}(s_i) - \text{Ind}(s_l))}{(\text{Ind}(s_j) - \text{Ind}(s_i)) + (\text{Ind}(s_l) - \text{Ind}(s_k))}$$

Por tanto, la relación de preferencia obtenida es:

$$P_D = \begin{pmatrix} - & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & - & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & - \end{pmatrix}$$

donde  $p_{ij}$  es el grado de preferencia de la alternativa  $x_i$  sobre  $x_j$  y se calcula como indica la Ecuación (1);  $i, j \in \{1, \dots, n\}; i \neq j; \text{Ind}(s_l) = l$ .

ii) *Aplicación de un grado de selección*

Existen diferentes funciones de selección para ordenar alternativas [6]. En este modelo de toma de decisiones proponemos el uso del grado de selección de no dominancia,  $NDD$ . Esta función indica el grado que una alternativa,  $x_i$ , no es dominada por las restantes alternativas. Se define como sigue

**Definición 11** [6] Sea  $P = [p_{ij}]$  una relación de preferencia definida sobre un conjunto de alternativas  $X$ . El grado de no dominancia de la alternativa  $x_i$ ,  $NDD_i$ , se obtiene aplicando la siguiente función:

$$NDD_i = \min\{1 - p_{ji}^S, j \neq i\}$$

donde  $p_{ji}^S = \max\{p_{ji} - p_{ij}, 0\}$  representa el grado que la alternativa  $x_i$  es estrictamente dominada por  $x_j$ .

iii) Finalmente, obtenemos el conjunto de alternativas no dominadas aplicando la siguiente función:

$$X^{ND} = \{x_i/x_i \in X, NDD_i = \max_{x_j \in X} \{NDD_j\}\}$$

**Ejemplo:** Para aplicar la fase de explotación al ejemplo que estamos desarrollando seguimos los siguientes pasos:

i) Obtenemos los grados de preferencia utilizando la definición propuesta por Wang et al. [11].

$$P_D = \begin{bmatrix} - & 1 & 0.667 \\ 0 & - & 0.333 \\ 0.333 & 0.667 & - \end{bmatrix}$$

ii) Calculamos la relación de preferencia estricta,  $P_D^S$ , y aplicamos el grado de no dominancia para cada alternativa:

$$P_D^S = \begin{bmatrix} - & 1 & 0.334 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0.334 & - \end{bmatrix}$$

$$NDD_1 = \min\{(1-0), (1-0)\} = 1$$

$$NDD_2 = \min\{(1-1), (1-0.334)\} = 0$$

$$NDD_3 = \min\{1-0.334, (1-0)\} = 0.664$$

iii) Finalmente obtenemos el conjunto solución de alternativas:

$$X^{ND} = \{x_1\}$$

## 5 Conclusiones

El objetivo de esta contribución es facilitar la expresividad y modelado de preferencias en problemas de decisión bajo incertidumbre. Para ello ha sido introducido el concepto de CTLDD que permite modelar expresiones lingüísticas comparativas similares a las expresiones utilizadas por los seres humanos mediante una gramática libre de contexto. Finalmente, un modelo lingüístico de toma de decisiones multicriterio que utiliza dichas expresiones lingüísticas, y realiza los procesos de computación mediante intervalos lingüísticos ha sido presentado.

## Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente financiado por los proyectos de investigación TIN-2009-08286, P08-TIC-3548 y fondos FEDER.

## Referencias

- [1] B. Arfi. Fuzzy decision making in politics: A linguistic fuzzy-set approach (LFSA). *Political Analysis*, 13(1):23–56, 2005.
- [2] G. Bordogna and G. Pasi. A fuzzy linguistic approach generalizing boolean information retrieval: A model and its evaluation. *Journal of the American Society for Information Science*, 44:70–82, 1993.
- [3] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Kluwer Academic, New York, 1980.
- [4] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 114(1):43–58, 2000.
- [5] J. Ma, D. Ruan, Y. Xu, and G. Zhang. A fuzzy-set approach to treat determinacy and consistency of linguistic terms in multi-criteria decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 44(2):165–181, 2007.
- [6] S.A. Orlovski. Decision-making with fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Sys.*, 1:155–167, 1978.
- [7] R.M Rodríguez, L. Martínez, and F. Herrera. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2011, (Doi:10.1109/TFUZZ.2011.2170076).
- [8] Y. Tang and J. Zheng. Linguistic modelling based on semantic similarity relation among linguistic labels. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(12):1662–1673, 2006.
- [9] V. Torra. Negation functions based semantics for ordered linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 11:975–988, 1996.
- [10] V. Torra. Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 25(6):529–539, 2010.
- [11] Y.M. Wang, J.B. Yang, and D.L. Xu. A preference aggregation method through the estimation of utility intervals. *Computers and Operations Research*, 32:2027–2049, 2005.
- [12] R.R. Yager. An approach to ordinal decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 12(3-4):237–261, 1995.
- [13] J.B. Yang, J. Liu, J. Wang, H-S. Sii, and H-W. Wang. Belief rule-base inference methodology using the evidential reasoning approach - rimer. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A*, 36(2):266–285, 2006.
- [14] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [15] L. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. *Information Sciences, Part I, II, III*, (8,9):199–249,301–357,43–80, 1975.